2008,**28A**(6):1077–1087

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

A_∞^∞- 型 Ringel-Hall 代数 *

侯汝臣
(烟台大学数学与信息科学学院 烟台 264005)
叶郁
(中国科学技术大学数学系 合肥 230026)

摘要: 这是利用 A_∞^∞ - 型 Ringel-Hall 代数研究 sl_∞^∞ - 型量子群的两篇文章中的第一篇. 为此首先需要研究建立在任意域 k 上的无限维路代数 kA_∞^∞ 的有限维表示. 在文章的第一部分, 我们给出了所有的不可分解 kA_∞^∞ - 表示, 并且清楚地刻画了它们之间的扩张关系; 在第二部分, 对于给定的有限域 k, 我们研究了 Ringel-Hall 代数 $H(kA_\infty^\infty)$. 主要观察是把 $H(kA_\infty^\infty)$ 看作 Ringel-Hall 代数 $H(kA_\infty)$ 的正向极限, 把 $H(kA_\infty)$ 看作 Ringel-Hall 代数 $H(kA_n)$ 的正向极限. 特别地, 我们得到了 $H(kA_\infty^\infty)$ 的一个 PBW- 基, 并且证明了 $H(kA_\infty^\infty)$ 恰好和它的合成子代数重合.

关键词: 路代数; Ringel-Hall 代数; 量子群.

MR(2000) 主题分类: 17B37; 16W35 **中图分类号**: O152.5 **文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2008)06-1077-11

1 引言

众所周知, 给定一个没有定向圈的有限箭图 Q, 我们就会有相应的对称 Cartan 矩阵, 进而得到相应的 Kac-Moody 代数和量子包络代数 $U=U_q(Q)$. 另一方面, 我们会得到有限域 k 上的路代数 kQ 的 Ringel-Hall 代数 $H(kQ)$. 过去十几年中在研究量子群方面取得的最重要的进展是, Ringel[1,2], Green[3] 和 Lusztig[4] 发现 U 的正部分 U^+ 以一种自然的形式同构于 $H(kQ)$ 的合成子代数 $C(kQ)$ 的扭一般形式. 肖杰和邓邦明 [5,6] 利用 Drinfeld double 的方法把这种同构扩展到整个 U 上. 以上就给出了利用 Ringel-Hall 代数的方法研究量子群的主要框架.

自然的问题是是否这种方法也适用于无限箭图. 朝这一方向努力的第一步是研究 A_∞^∞ 型箭图和相应的量子群 $U_q(sl_\infty^\infty)$. 这就是本文的目的所在.

在过去二十年中, 李代数 gl_∞ 和 gl_∞ 在数学和物理的一些分支中发挥了重要作用. 它们不仅作为无限形式的 Kac-Moody 李代数的重要例子而引起人们的兴趣 [7], 而且它们在非线性方程理论 [8], 弦理论以及两维统计模型理论中有重要应用 [9]. gl_∞ 所对应的 Drinfeld 定义下的量子群, 即 $U_q(gl_\infty)$ 已经由 Levendorskiĭ 和 Soibelman 给出了很好的实现 [10], 并且被其他许多学者研究 [11,12]. Frenkel 和 Mukhin 利用 Hall 代数的方法实现了泛包络代数 $U(sl_\infty^\infty)$

收稿日期: 2006-11-12; 修订日期: 2008-08-29
E-mail: hourc@mail.ustc.edu.cn; yeyu@ustc.edu.cn
* 基金项目: 国家自然科学基金 (10601052, 10501041) 资助

的负部分，参见文献 [11, 引理 10.2]. 注意那里的记号是 $U_{\mathbb{Z}}(sl_\infty^-)$, 并且代数定义在 $\mathbb{Z}$ 上. 然而，至今研究量子群 $U_q(sl_\infty^\infty)$ 的工作还很少.

为了利用 A_∞^∞ - 型 Ringel-Hall 代数研究 sl_∞^∞ - 型量子群，首先，我们需要研究任意域 k 上的无限维路代数 kA_∞^∞ 的有限维表示. 需要注意的是 kA_∞^∞ 是一个没有单位元的无限维代数，并且在它的有限维模范畴中，既不存在投射对象又不存在内射对象. 然而，给定一个有限维 kA_∞^∞ - 模，存在某个 $n\in\mathbb{N}$, 我们可以把该模看作 A_n - 型路代数的模；并且我们可以把 Ringel-Hall 代数 $H(kA_\infty^\infty)$ 看作 Ringel-Hall 代数 $H(kA_\infty)$ 的正向极限，把 $H(kA_\infty)$ 看作 Ringel-Hall 代数 $H(kA_n)$ 的正向极限.

在第一部分我们研究了 kA_∞^∞ 的有限维表示范畴，确定了它的所有的不可分解对象，并且详细刻画了不可分解对象之间的扩张. 在第二部分，我们通过把 $H(kA_\infty^\infty)$ 的两个模元素的计算归结为某个合适的 Ringel-Hall 代数 $H(kA_a^b)$ 的两个模元素的计算，其中 $a,b\in\mathbb{Z}$,$a\le b$, 来研究 $H(kA_\infty^\infty)$. 特别地，我们得到了 $H(kA_\infty^\infty)$ 的一个 PBW- 基，并且证明了 $H(kA_\infty^\infty)$ 和它的合成子代数重合.

本文中 $\mathbb{N}$ 表示正整数集合， $\mathbb{Z}$ 表示整数集合. 所有的模都是有限维左模. $|X|$ 表示集合 X 所含元素的基数.

2 A_∞^∞ 型路代数的有限维表示

设 $Q=(Q_0,Q_1,h,t)$ 是一个箭图，其中 Q_0, Q_1 是两个集合，分别称为 Q 的顶点集和箭向集， h,t 是两个从 Q_1 到 Q_0 的映射，分别称 $h(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 为 $\alpha\in Q_1$ 的头和尾. 设 $l\in\mathbb{N}$, 如果有一系列的箭向 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$, 满足 $t(\alpha_i)=h(\alpha_{i+1})$, $1\le i\le l-1$, 我们就称 $p=\alpha_l\cdots\alpha_1$ 是 Q 的一个长度为 l 的路. 令 $h(p)=h(\alpha_1)$, $t(p)=t(\alpha_l)$, $l(p)=l$, 分别称之为路 p 的头，尾和长度. 特别地，规定顶点 $i\in Q_0$ 是长度为零的路，标示为 e_i. 给定域 k 和箭图 Q, 定义 kQ 是以 Q 中所有的有限长度路为基的建立在 k 上的向量空间. 对于 Q 中的任意两个路 $p=\alpha_m\cdots\alpha_1$ 和 $q=\beta_n\cdots\beta_1$, 定义乘积运算如下

$$qp=\begin{cases}\beta_n\cdots\beta_1\alpha_m\cdots\alpha_1, & \text{如果 } t(p)=h(q),\\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

在线性扩张下，容易验证 kQ 成为一个 k - 代数，我们称之为箭图 Q 的路代数.

箭图 Q 的一个 k 表示 (V,f) 是指由一组域 k 上的向量空间 $\{V_i|i\in Q_0\}$ 和一组 k - 线性映射 $\{f_\alpha:V_i\to V_j|\alpha\in Q_1,h(\alpha)=i,t(\alpha)=j\}$ 构成的集合. 如果 $\bigoplus\limits_{i\in Q_0}V_i$ 是有限维的 k 向量空间，我们就称表示 (V,f) 是有限维的. 一个众所周知的结论是箭图 Q 在域 k 上的有限维表示范畴等价于路代数 kQ 的有限维 k - 模范畴.

考虑下面的 A_n - 型箭图 A_n 的路代数 $kA_n, n\in\mathbb{N}$

$$\overset{1}{\bullet}\xrightarrow{\alpha_1}\overset{2}{\bullet}\xrightarrow{\alpha_2}\bullet\ \cdots\ \bullet\xrightarrow{\alpha_{n-1}}\overset{\mathrm{n}}{\bullet}.$$

众所周知箭图 A_n 是有限表示型，即仅存在有限多个互不同构的不可分解有限维 kA_n - 模. 相应的，在下面我们列出了所有的互不同构的不可分解有限维 A_n - 表示.

$$\begin{array}{ccccccccccc}(1) & & & (i) & & & (i+s-1) & & & (n) \\ 0\longrightarrow\cdots & 0\longrightarrow & k\xrightarrow{1_{id}} & k\xrightarrow{1_{id}} & \cdots & \xrightarrow{1_{id}} & k\longrightarrow & 0\ \cdots & \longrightarrow & 0,\end{array}$$

其中 $1 \le i \le n$, $1 \le s \le n-i+1$, $i, s \in \mathbb{N}$, 1_{id} 是恒等态射. 关于有限维遗传代数的表示理论，请参阅文献 [13] 和 [14].

现在我们用 kA_∞^∞ 表示如下 A_∞^∞ - 型箭图 A_∞^∞ 的路代数

$$\cdots\ \cdots \overset{0}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_0} \overset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_1} \overset{2}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_2} \bullet \ \cdots \ \bullet \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \overset{n}{\bullet} \cdots\ \cdots,$$

用 kA_∞^a 表示如下 A_∞ - 型箭图 A_∞^a 的路代数，其中 $a \in \mathbb{Z}$

$$\overset{a}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_a} \overset{a+1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_{a+1}} \bullet \ \cdots \ \bullet \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \overset{n}{\bullet} \cdots\ \cdots,$$

用 kA_b^a 表示如下 A_n - 型箭图 A_b^a 的路代数，其中 $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \le b$, $n = b-a+1$,

$$\overset{a}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_a} \overset{a+1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_{a+1}} \bullet \ \cdots \ \bullet \xrightarrow{\alpha_{b-1}} \overset{b}{\bullet},$$

注意如果 A_b^a 出现，我们总认为 $a, b \in \mathbb{Z}$ 并且 $a \le b$.

注记 2.1 给定 $a, b \in \mathbb{Z}$, A_∞^a 和 A_b^a 是 A_∞^∞ 的子箭图, 因此可以把 kA_∞^a 和 kA_b^a 看作 kA_∞^∞ 的子代数. 注意根据路代数的定义，kA_∞^∞ 和 kA_∞^a 都没有单位元. 容易验证 kA_∞^∞ 和 kA_∞^a 都是无限维 k - 代数，而且 kA_b^a 和 kA_∞^a 既是 kA_∞^∞ 的子代数又是商代数. 本文中 kA_∞^∞ (或者 kA_∞^a, $a \in \mathbb{Z}$) 模 -E 总认为满足条件 $kA_\infty^\infty E = E$ (或者 $kA_\infty^a E = E$), 这等价于 $E = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} e_i E$.

下文中令 kA_∞^∞-mod 表示有限维 kA_∞^∞ - 模范畴，kA_∞^a-mod 表示有限维 kA_∞^a - 模范畴，kA_b^a-mod 表示有限维 kA_b^a - 模范畴. 注意它们分别等价于对应箭图的有限维表示范畴.

引理 2.1 给定一个 kA_∞^∞ - 模 E, 存在唯一的整数对 $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \le b$ 使得 $e_a E \ne 0$, $e_b E \ne 0$, 但是对于 $j > b$ 或者 $j < a$, $j \in \mathbb{Z}$, 有 $e_j E = 0$. 更一般的，自然地可把 E 看做一个 kA_b^a - 酉模.

证 因为 $E = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} e_i E$ 并且 E 是有限维模，所以只存在有限多的 i 使得 $e_i E \ne 0$. 在这样的整数 i 中，我们取 a 和 b 分别为最小和最大的数. 由于 kA_b^a 是 kA_∞^∞ 的子代数，自然地可把 E 看作一个 kA_b^a 模. 另外我们有 $1_{id} m = m$, $\forall m \in E$, 其中 $1_{id} = e_a + \cdots + e_b$ 是 kA_b^a 的单位元. 这是因为 $E = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} e_i E = \bigoplus\limits_{a \le i \le b} e_i E$. ▌

注记 2.2 引理 2.1 赋予每一个有限维 kA_∞^∞ - 模 E 一个唯一的整数对 (a, b) 使得 $E = kA_b^a E$, $e_a E \ne 0$, $e_b E \ne 0$. 在这种情况下我们称 E 是一个 (a, b) - 型 kA_∞^∞ - 模.

相反地，我们可以自然地把 kA_b^a - 模看作 kA_∞^∞ - 模.

引理 2.2 如果 E 是一个 kA_b^a - 模，那么 E 也是一个 kA_∞^∞ - 模，使得对任意 $i \notin [a, b]$, $i \in \mathbb{Z}$, 有 $e_i E = 0$.

证 设 $\rho : kA_b^a \longrightarrow \mathrm{End}_k(E)$ 是 kA_b^a - 模 E 的模结构态射. 容易验证 $kA_b^a \cong kA_\infty^\infty / \mathcal{J}$, 其中 $\mathcal{J}$ 是 kA_∞^∞ 的由 $\{\alpha_m, e_n | m \notin [a, b), n \notin [a, b], m, n \in \mathbb{Z}\}$ 生成的理想. 设 $\pi : kA_\infty^\infty \twoheadrightarrow kA_b^a$ 是自然的 k- 代数满同态. 那么我们得到 k - 代数同态 $\rho\pi : kA_\infty^\infty \longrightarrow \mathrm{End}_k(E)$. 这样这一态射也赋予 E 一个 kA_∞^∞ - 模结构. 具体的，对任意 $u \in E$ 以及 A_∞^∞ 的任意路元素 p, 有

$$pu = \begin{cases} \rho(p)(u), \text{如果 } p \text{ 是} A_b^a \text{的一个路元素;} \\ 0, \qquad\quad \text{其他情况.} \end{cases}$$ ▌

相似地，可以证明

引理 2.3 设 E 是一个 kA_b^a - 模. 那么 E 也是一个 kA_d^c - 模，其中 $c \le a, b \le d$, 并且 $e_i E = 0$ 如果 $c \le i < a$ 或者 $b < i \le d$, $i \in \mathbb{Z}$.

现在考虑模态射.

引理 2.4 设 E,F 是 kA_b^a - 模, $f\in \mathrm{Hom}_{kA_b^a}(E,F)$. 那么当我们把 E,F 看作 kA_∞^∞ - 模 (或者 kA_d^c - 模,其中 $c\le a$, $d\ge b$) 时,有 $f\in \mathrm{Hom}_{kA_\infty^\infty}(E,F)$ (或者 $f\in \mathrm{Hom}_{kA_d^c}(E,F)$).

证 设 $\theta: kA_b^a\longrightarrow \mathrm{End}_k(E)$, $\eta: kA_b^a \longrightarrow \mathrm{End}_k(F)$ 分别是赋予 E,F kA_b^a - 模结构的 k - 代数态射. 根据引理 2.2 设 θ_1, η_1 分别是赋予 E, F kA_∞^∞ - 模结构的 k - 代数态射. 由于 $f\in \mathrm{Hom}_k(E,F)$, 只需验证 $f(\theta_1(p)(v))=\eta_1(p)(f(v))$, 其中 $p\in kA_\infty^\infty$, $v\in E$.

而根据线性又只需验证当 p 是一个路时的情形. 如果 $p\notin A_b^a$, 那么 $\theta_1(p)=0$, $\eta_1(p)=0$, 显然有 $f(\theta_1(p)(v))=\eta_1(p)(f(v))=0$. 如果 $p\in A_b^a$, 那么由于 $f\in \mathrm{Hom}_{kA_b^a}(E,F)$, 有 $f(\theta_1(p)(v))=f(\theta(p)(v))=\eta(p)(f(v))=\eta_1(p)(f(v))$. 相似可证其他结论. ▌

相似地,可以证明下列结论.

引理 2.5 设 E,F 是 kA_∞^∞ - 模, $f\in \mathrm{Hom}_{kA_\infty^\infty}(E,F)$. 那么存在 $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\le b$ 满足 $f\in \mathrm{Hom}_{kA_b^a}(E,F)$, 并且 $f(pE)=0$, 如果 $p\notin A_b^a$.

注记 2.3 从以上的讨论我们可以推导出可以把 kA_b^a-mod (或者 kA_∞^a-mod) 看作 kA_∞^∞ -mod 的一个完全忠实的子范畴.

定理 2.1 如果 E 是一个 (a,b) - 型的 kA_∞^∞ - 模,那么 E 是不可分解 kA_∞^∞ - 模当且仅当 E 是一个不可分解的 kA_b^a - 模. 另外,所有的有限维不可分解 kA_∞^∞- 表示可以如下给出

$$\cdots\ 0\longrightarrow \overset{(a)}{k}\xrightarrow{1_{id}} k\xrightarrow{1_{id}}\ \cdots\ \xrightarrow{1_{id}}\overset{(b)}{k}\longrightarrow 0\ \cdots, \tag{2.1}$$

其中 $a\le b$, $a,b\in\mathbb{Z}$.

证 首先我们断言任意不可分解 (a,b) - 型 kA_∞^∞ - 模 E 也是不可分解 kA_b^a - 模. 否则对应的 kA_b^a - 模 E 可以分解为 $E'\oplus E''$, 其中 E' 和 E'' 是 kA_b^a 模. 根据 引理 2.2 我们知道可以把 E' 和 E'' 看作 kA_∞^∞ - 模. 因此 kA_∞^∞ - 模 E 可以分解为 $E'\oplus E''$, 其中 E' 和 E'' 是 kA_∞^∞ - 模. 这导致矛盾.

其次,当我们根据引理 2.2 把任意不可分解 kA_b^a - 模 E 看作 kA_∞^∞ - 模时,我们断言 E 也是一个不可分解 kA_∞^∞ - 模. 否则有 $E\cong E'\oplus E''$, 其中 E' 和 E'' 是 kA_∞^∞ - 模. 根据引理 2.2 我们知道 $e_iE'=0=e_iE''$, 其中 $i\notin[a,b], i\in\mathbb{Z}$. 因此根据引理 2.3 可以把 E' 和 E'' 看作 kA_b^a - 模. 因此作为 kA_b^a - 模, $E\cong E'\oplus E''$. 这就导致矛盾.

最后,由于我们已知所有的有限维不可分解 kA_b^a - 模,其中 $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\le b$, 我们可以如下给出所有的有限维不可分解 kA_∞^∞- 表示

$$\cdots\ 0\longrightarrow \overset{(a)}{k}\xrightarrow{1_{id}} k\xrightarrow{1_{id}}\ \cdots\ \xrightarrow{1_{id}}\overset{(b)}{k}\longrightarrow 0\ \cdots,$$

其中 $a\le b$, $a,b\in\mathbb{Z}$. ▌

为了书写方便,我们把对应于表示 (2.1) 的 kA_∞^∞ - 模记为 ind_b^a. 定义 ind_b^a 的长度为 $b-a+1$, 记为 $l(\mathrm{ind}_b^a)$. 因此以一种自然的方式可以定义任意 kA_∞^∞ - 模的长度. 即如果 kA_∞^∞- E 同构于 $\bigoplus\limits_{i=1}^{l}E_i$, 其中 E_i 是不可分解 kA_∞^∞ - 模,定义 E 的长度 $l(E)$ 为 $\sum\limits_{i=1}^{l}l(E_i)$. 容易验证 ind_b^a 是一个 uniserial 模, $\{\mathrm{ind}_b^l|a\le l\le b, l\in\mathbb{Z}\}$ 是它的所有子模.

设 $\{S_i|i\in\mathbb{Z}\}$ 是所有的两两互不同构的单 kA_∞^∞ - 模. 如果 $E\in kA_\infty^\infty$-mod, 记 $\underline{\dim}E=((\underline{\dim}E)_{e_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ 为 E 的维数向量,即 $(\underline{\dim}E)_{e_i}$ 恰是 S_i 在 E 中的 Jordan-Hölder 重数.

引理 2.6 设 M,N 分别是 (a,b) - 型和 (c,d) - 型 kA_∞^∞ - 模. 如果有一个 kA_∞^∞ - 模短正和列, $0\longrightarrow M\longrightarrow E\longrightarrow N\longrightarrow 0$, 那么 E 是 (f,g) - 型 kA_∞^∞ - 模,其中 $g=\max\{b,d\}$,

$f=\min\{a,c\}$. 特别的，可以把该短正和列看作一个 kA_g^f - 模短正和列.

证 注意到 $\underline{\dim}E=\underline{\dim}M+\underline{\dim}N$. 这意味着对任意 $i\in\mathbb{Z}$, 有 $(\underline{\dim}E)_{e_i}=(\underline{\dim}M)_{e_i}+(\underline{\dim}N)_{e_i}$. 由于 $f=\min\{a,c\}$, $g=\max\{b,d\}$, 有 $(\underline{\dim}E)_{e_f}=(\underline{\dim}M)_{e_f}+(\underline{\dim}N)_{e_f}\neq 0$, 以及 $(\underline{\dim}E)_{e_g}=(\underline{\dim}M)_{e_g}+(\underline{\dim}N)_{e_g}\neq 0$. 而对于任意 $j\notin[f,g], j\in\mathbb{Z}$, 有 $(\underline{\dim}E)_{e_j}=(\underline{\dim}M)_{e_j}+(\underline{\dim}N)_{e_j}=0$. 因此 E 是 (f,g) - 型 kA_∞^∞ - 模. 根据引理 2.3 和引理 2.5, 可以把该短正和列看作一 kA_g^f - 模的短正和列. ∎

给定 kA_∞^∞ - 模 A 和 B, 考虑由如下的 kA_∞^∞ - 模短正和列 $0\longrightarrow B\longrightarrow E\longrightarrow A\longrightarrow 0$ 组成的集合 $\hat{E}_{kA_\infty^\infty}(A,B)$. 在 $\hat{E}_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 中两个短正和列 $0\longrightarrow B\longrightarrow E_1\longrightarrow A\longrightarrow 0$ 和 $0\longrightarrow B\longrightarrow E_2\longrightarrow A\longrightarrow 0$ 称为等价的如果存在一个 kA_∞^∞ - 模同态 $\alpha: E_1\longrightarrow E_2$ 使得图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2.2}$$

交换. 易验证上面定义的关系是等价关系. 记 $\hat{E}_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 的等价类集合为 $E_{kA_\infty^\infty}(A,B)$.

相似地，对于 kA_b^a - 模 E 和 F, 我们可以定义集合 $\hat{E}_{kA_b^a}(E,F)$ 和 $E_{kA_b^a}(E,F)$.

定理 2.2 设 A,B 分别是 (a,b) - 型和 (c,d) - 型 kA_∞^∞ - 模. 令 $f=\max\{b,d\}, e=\min\{a,c\}$. 那么在集合 $E_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 和 $Ext^1_{kA_f^e}(A,B)$ 之间存在双射.

证 一方面，根据引理 2.6 任意 kA_∞^∞ - 模的短正和列 $0\longrightarrow B\longrightarrow E\longrightarrow A\longrightarrow 0$ 可被看作 kA_f^e - 模的短正和列，特别的 E 是 (e,f) - 型 kA_∞^∞ - 模. 另外如果上图 (2.2) 作为 kA_∞^∞ - 模交换，那么作为 kA_f^e - 模该图也交换.

另一方面，根据引理 2.3 可以把 A 和 B 看作 kA_f^e - 模. 并且根据引理 2.2 和引理 2.4 可以把任意 kA_f^e - 模短正和列 $0\longrightarrow B\longrightarrow E\longrightarrow A\longrightarrow 0$ 看作 kA_∞^∞ - 模短正和列. 并且如果作为 kA_f^e - 模上图 (2.2) 交换，那么作为 kA_∞^∞ - 模该图也交换.

所以可以把集合 $\hat{E}_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 看作集合 $\hat{E}_{kA_f^e}(A,B)$, 进而把集合 $E_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 看作集合 $E_{kA_f^e}(A,B)$. 众所周知在集合 $E_{kA_f^e}(A,B)$ 和 $Ext^1_{kA_f^e}(A,B)$ 之间存在双射. 因此集合 $E_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 和 $Ext^1_{kA_f^e}(A,B)$ 之间存在双射. ∎

推论 2.1 设 A,B 是 kA_∞^∞ - 模，那么集合 $E_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 上有一个自然的 abelian 群结构.

证 这是因为根据定理 2.2 存在 $e,f\in\mathbb{Z}$ 使得在 $E_{kA_\infty^\infty}(A,B)$ 和 $Ext^1_{kA_f^e}(A,B)$ 之间有一个集合之间的同构，而 $Ext^1_{kA_f^e}(A,B)$ 有一个自然的 abelian 群结构. ∎

注意上面的讨论对 kA_∞^a - 模也成立，其中 $a\in\mathbb{Z}$.

推论 2.2 对于任意 kA_∞^a - 模 E, 如果 $m\geq a$, $m,a\in\mathbb{Z}$, 那么集合 $E_{kA_\infty^a}(E,\mathrm{ind}_m^a)$ 只包含一个元素.

证 设 E 是一个 kA_∞^a - 模，那么存在唯一的整数 $c,d\in\mathbb{Z}$, $c\leq d$ 使得 E 是 (c,d) - 型 kA_∞^a - 模. 令 $r=\max\{m,d\}$, 那么可以把 kA_∞^a - 模 ind_m^a 看作 kA_r^a - 模，同样可以把 kA_∞^a - 模 E 看作 kA_r^a - 模. 由于 ind_m^a 是一个内射 kA_r^a - 模，因此 $Ext^1_{kA_r^a}(E,\mathrm{ind}_m^a)=0$. 所以根据定理 2.2 集合 $E_{kA_\infty^a}(E,\mathrm{ind}_m^a)$ 只包含一个元素. ∎

3 Ringel-Hall 代数 $H(kA_\infty^\infty)$ 和 $H(kA_\infty^a)$

设 k 是一个有限域， $|k|=q<\infty$. 为了考虑 kA_∞^∞ 的 Ringel-Hall 代数 $H(kA_\infty^\infty)$, 我们只需研究有限左 kA_∞^∞ - 模范畴，记它为 kA_∞^∞-fin. 这里有限模是指该模只含有限个元素．因为有限 kA_∞^∞ - 模恰好是有限维 kA_∞^∞ - 模，所以 kA_∞^∞-fin= kA_∞^∞-mod.

引理 3.1 设 $M,N\in kA_\infty^\infty$-mod, 那么 $E_{kA_\infty^\infty}(M,N)$ 是一个有限集.

证 根据定理 2.2 易证. ▌

设 $M,N_1,\cdots,N_t\in kA_\infty^\infty$-mod. 记 $g^M_{N_1,\cdots,N_t}$ 为由 M 的子模生成的满足 $M_{i-1}/M_i\cong N_i$ 的滤链 $M=M_0\supseteq M_1\supseteq\cdots\supseteq M_t=0$ 的个数，其中 $1\le i\le t$.

注记 3.1 设 M 是 (a,b) - 型 kA_∞^∞ - 模，那么可以把 kA_∞^∞ - 模 M 的任意商模和子模也看作 kA_b^a - 模．所以可以把 kA_∞^∞ - 模 M 的满足条件 $M_{i-1}/M_i\cong N_i$, 其中 $1\le i\le t$ 的任意 kA_∞^∞ - 模滤链 $M=M_0\supseteq M_1\supseteq\cdots\supseteq M_t=0$ 看作 kA_b^a - 模 M 的满足相应条件的 kA_b^a - 模滤链．另一方面，可以把任意 kA_b^a - 模 M 的任意满足条件 $M_{i-1}/M_i\cong N_i$, $1\le i\le t$ 的 kA_b^a - 模滤链 $M=M_0\supseteq M_1\supseteq\cdots\supseteq M_t=0$ 看作 kA_∞^∞ - 模 M 的满足相应条件的 kA_∞^∞ - 模滤链．因此要计算 $g^M_{N_1,\cdots,N_t}$ 我们只需确定 kA_b^a - 模 M 的满足条件 $M_{i-1}/M_i\cong N_i$, $1\le i\le t$ 的 kA_b^a - 模滤链 $M=M_0\supseteq M_1\supseteq\cdots\supseteq M_t=0$ 的个数.

设 $M\in kA_\infty^\infty$-mod, 记 M 的同构类为 $[M]$. 下面的引理来自于两种不同的计算满足条件 $M/M_1\cong N_1, M_1/M_2\cong N_2, M_2\cong N_3$ 的 M 的滤链 $M\supseteq M_1\supseteq M_2$ 的个数.

引理 3.2 设 $M,N_1,N_2\in kA_\infty^\infty$-mod, 那么

$$\sum_{[L]}g^L_{N_1,N_2}g^M_{L,N_3}=\sum_{[L]}g^M_{N_1,L}g^L_{N_2,N_3}=g^M_{N_1,N_2,N_3}.$$

令 $H(kA_\infty^\infty)$ 表示以 $\{[M]|M\in kA_\infty^\infty\text{-mod}\}$ 为基的 $\mathbb{Q}$ - 向量空间．在 $H(kA_\infty^\infty)$ 上定义乘法 $\diamond$: $[N_1]\diamond[N_2]:=\sum_{[M]}g^M_{N_1,N_2}[M]$. 注意根据引理 3.1 右式的和是一个有限和.

引理 3.3 在上面定义的乘法 $\diamond$ 下， $H(kA_\infty^\infty)$ 成为一个以 $[0]$ 作为单位元的结合 $\mathbb{Q}$ - 代数，我们称它为 kA_∞^∞ 的 Ringel-Hall 代数.

证 注意乘法 $\diamond$ 的结合性来自于 $[M]$ 在 $([N_1]\diamond[N_2])\diamond[N_3]$ 和 $[N_1]\diamond([N_2]\diamond[N_3])$ 的系数分别是 $\sum_{[L]}g^L_{N_1,N_2}g^M_{L,N_3}$ 和 $\sum_{[L]}g^M_{N_1,L}g^L_{N_2,N_3}$, 而根据引理 3.2 它们正好相等. ▌

相似地，可以定义 Ringel-Hall 代数 $H(kA_\infty^a)$ 和 $H(kA_b^a)$, 其中 $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\le b$.

根据定义可以看到代数 $H(kA_\infty^\infty)$ 的结构由有限 kA_∞^∞ - 模范畴决定．现在我们回忆一个重要的计算结构系数的公式. 设 M,N 是 kA_b^a - 模. 记任意 kA_b^a - 模 X 的自同构群 $Aut_{kA_b^a}(X)$ 的阶数为 a_X. 令 $Ext^1_{kA_b^a}(M,N)_L$ 表示 $Ext^1_{kA_b^a}(M,N)$ 的以 L 作为中间项的子集．那么

$$g^L_{M,N}=\frac{a_L|Ext^1_{kA_b^a}(M,N)_L|}{a_Ma_N|\mathrm{Hom}_{kA_b^a}(M,N)|}. \tag{3.1}$$

证明参见文献 [15].

设 M,N 分别是 (a,b) - 型和 (c,d) - 型 kA_∞^∞ - 模．令 $f=\max\{b,d\}$, $e=\min\{a,c\}$, 那么根据注记 3.1 和公式 (3.1) 我们有

$$g^L_{M,N}=\frac{a_L|Ext^1_{kA_f^e}(M,N)_L|}{a_Ma_N|\mathrm{Hom}_{kA_f^e}(M,N)|}. \tag{3.2}$$

命题 3.1 设 $M_1,M_2,\cdots,M_t$ 分别是 (m_i,n_i) - 型 kA_∞^∞ - 模，其中 $i=1,2,\cdots,t$. 设 $m,n\in\mathbb{Z}$, 其中 $m\le a=\min\{m_i|i=1,\cdots,t\}$, $n\ge b=\max\{n_i|i=1,\cdots,t\}$. 如果在 $H(kA_n^m)$

中我们有

$$[M_1]\diamond\cdots\diamond[M_t]=\sum_{[L]}g^L_{M_1,\cdots,Mt}[L], \tag{3.3}$$

这时把 M_i 看作 kA_n^m - 模，那么在 $H(kA_\infty^\infty)$ 中

$$[M_1]\diamond\cdots\diamond[M_t]=\sum_{[L]}g^L_{M_1,\cdots,M_t}[L] \tag{3.4}$$

成立，其中把后一个和式中的那些 L 看作 kA_∞^∞ - 模.

证 首先，如果在 $H(kA_\infty^\infty)$ 中有

$$[M_1]\diamond\cdots\diamond[M_t]=\sum_{[L]}g^L_{M_1,\cdots,M_t}[L],$$

那么我们断言任意满足 $g^L_{M_1,\cdots,M_t}\neq 0$ 的 kA_∞^∞ - 模 L 一定是 (a,b) - 型 kA_∞^∞ - 模．要证明它只需重复应用引理 2.6. 这样根据引理 2.3 可以把 L 看作 kA_n^m - 模.

其次如果我们把 $M_1, M_2, \cdots, M_t$ 看作 kA_n^m - 模，并且在 $H(kA_n^m)$ 中有

$$[M_1]\diamond\cdots\diamond[M_t]=\sum_{[L]}g^L_{M_1,\cdots,M_t}[L],$$

那么根据引理 2.2 可以把 kA_n^m - 模 L 看作 kA_∞^∞ - 模．并且容易验证这样的 L 一定是 (a,b) - 型 kA_∞^∞ - 模．另外根据注记 3.1 相对应的系数 $g^L_{M_1,\cdots,M_t}$ 相等．因此命题可证. ▮

定理 3.1 通过把 $H(kA_b^a)$ 中的元素 $[L]$ 映到 $H(kA_\infty^\infty)$ 中相对应的元素 $[L]$, 可以自然的把 $H(kA_b^a)$ 看作 $H(kA_\infty^\infty)$ 的一个子代数.

证 根据命题 3.1 易证. ▮

相似地, 我们可以证明：可以自然的把 $H(kA_\infty^n)$ 看作 $H(kA_\infty^\infty)$ 子代数, 其中 $n\in\mathbb{Z}$; 可以自然的把 $H(kA_b^a)$ 看作 $H(kA_\infty^m)$ 的子代数, 其中 $a\geq m$; 可以自然的把 $H(kA_b^a)$ 看作 $H(kA_d^c)$ 的子代数，其中 $c\leq a$, $b\leq d$.

对于有限 $\mathbb{Z}$ - 模 M, 记它的长度为 $l_\mathbb{Z}(M)$.

引理 3.4 设 R 是一个 finitary 环，设 $L\in R$-fin, 并且 L 有一个以 $M_1,\cdots,M_t$ 为因子的滤链．那么 $l_\mathbb{Z}(Ext^1_R(L,L))\leq l_\mathbb{Z}(Ext^1_R(M_1\oplus\cdots\oplus M_t, M_1\oplus\cdots\oplus M_t))$. 另外，等式成立当且仅当 $L\cong M_1\oplus\cdots\oplus M_t$.

证 参见文献 [16]. ▮

由于 kA_b^a 是一个 finitary 环，引理 3.4 对于 kA_b^a-mod 成立．记 ind-kA_∞^∞ 为 kA_∞^∞-mod 的由有限维不可分解 kA_∞^∞ - 模构成的全子范畴.

推论 3.1 $H(kA_\infty^\infty)$ 是由所有的 $[M]$ 生成的，其中 $M\in$ ind-kA_∞^∞.

证 设 $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_t$, M_i 是不可分解 kA_∞^∞ - 模， $i=1,\cdots,t$. 并且设 M 是 (a,b) - 型 kA_∞^∞ - 模，那么也可以把 M_i 看作 kA_b^a - 模．在 $l_\mathbb{Z}(E_{kA_\infty^\infty}(M,M))$ 上应用数学归纳法．如果 $|E_{kA_\infty^\infty}(M,M)|=1$, 那么 $[M]=c[M_1]\diamond\cdots\diamond[M_t]$, 其中 $0\neq c\in\mathbb{Q}$. 如果 $|E_{kA_\infty^\infty}(M,M)|\neq 1$, 那么

$$[M_1]\diamond\cdots\diamond[M_t]=c[M]+\sum_{[L]\neq[M]}c_L[L],$$

其中在和式中的 L 取遍所有使 $c_L\neq 0$ 的模．如果 $c_L\neq 0$, $L\ncong M$, 那么 L 必是 (a,b) - 型 kA_∞^∞ - 模．因此根据定理 2.2 有 $l_\mathbb{Z}(E_{kA_\infty^\infty}(L,L))=l_\mathbb{Z}(Ext^1_{kA_b^a}(L,L))$, $l_\mathbb{Z}(Ext^1_{kA_b^a}(M,M))=$

$l_{\mathbb{Z}}(E_{kA_\infty^\infty}(M,M))$. 注意可以把 L 看作一个以 $M_1,\cdots,M_t$ 作为滤链的 kA_b^a - 模. 作为 kA_b^a - 模有 $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_t$. 因此根据引理 3.4 我们有 $l_{\mathbb{Z}}(Ext^1_{kA_b^a}(L,L))<l_{\mathbb{Z}}(Ext^1_{kA_b^a}(M,M))$. 所以我们有 $l_{\mathbb{Z}}(E_{kA_\infty^\infty}(L,L))<l_{\mathbb{Z}}(E_{kA_\infty^\infty}(M,M))$. 这样根据数学归纳法结论可证. ▌

如果 E 是一个不可分解 kA_∞^∞ - 模，那么根据定理 2.1 存在 $a,b\in\mathbb{Z}$,$a\le b$, 使得 E 同构于 ind_b^a. 下面我们在由所有的不可分解 kA_∞^∞ - 模的同构类组成的集合，即 $\{\mathrm{ind}_b^a\}_{a,b\in\mathbb{Z}}$ 上引入一个全序. 给定不可分解 kA_∞^∞ - 模 ind_b^a 和 ind_d^c, 如果 $a<c$ 或者 $a=c$ 并且 $b<d$, 就定义 $\mathrm{ind}_b^a<\mathrm{ind}_d^c$. 即有

$$\cdots\cdots<\mathrm{ind}_a^a<\mathrm{ind}_{a+1}^a<\cdots<\mathrm{ind}_{a+1}^{a+1}<\mathrm{ind}_{a+2}^{a+1}<\cdots\cdots,$$

$a\in\mathbb{Z}$.

命题 3.2 设 $E<F$ 是一对不可分解 kA_∞^∞ - 模. 那么 $\mathrm{Hom}_{kA_\infty^\infty}(E,F)=0$ 并且

$$|E_{kA_\infty^\infty}(F,E)|=1.$$

证 记 S_i 为对应于箭图 A_∞^∞ 的第 i- 个顶点的单 kA_∞^∞ - 模，$i\in\mathbb{Z}$. 设 $E=\mathrm{ind}_b^a$, $F=\mathrm{ind}_d^c$, 其中 $a\le b$, $c\le d$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, 那么有两种情况发生，即或者 $a<c$ 或者 $a=c$ 并且 $b<d$.

如果 $a<c$, 那么 ind_b^a 的任意商模都包含 S_a 作为 top, 而 ind_d^c 的任一子模都不会以 S_a 作为因子，因此我们一定有 $\mathrm{Hom}_{kA_\infty^\infty}(\mathrm{ind}_b^a,\mathrm{ind}_d^c)=0$.

如果 $a=c$ 并且 $b<d$, 由于 ind_d^c 是一个 uniserial 模并且 ind_b^a 是 ind_d^c 的一个真商模，并且 ind_b^a 的任意商模都不会以 S_d 作为 socle, 我们一定有 $\mathrm{Hom}_{kA_\infty^\infty}(\mathrm{ind}_b^a,\mathrm{ind}_d^c)=0$.

回忆给定有限维 kA_n^m - 模 X 和 Y, 其中 $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\le n$, 那么有 $DExt^1_{kA_n^m}(X,Y)\cong\mathrm{Hom}_{kA_n^m}(\tau^{-1}Y,X)$, 其中 τ 是 Auslander-Reiten 变换， $D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$. 容易验证

$$\tau^{-1}\mathrm{ind}_b^a=\mathrm{ind}_{b-1}^{a-1}.$$

令 $f=\max\{b,d\}$, $e=\min\{a,c\}$, 那么可以把 ind_b^a 和 ind_d^c 看作 kA_f^e - 模. 如果 $a=e$, 因为 ind_b^a 是一个内射 kA_f^e - 模，所以 $Ext^1_{kA_f^e}(\mathrm{ind}_d^c,\mathrm{ind}_b^a)=0$.

如果 $a>e$, 那么由于 $a\le c$, 所以有 $a-1<c$. 应用与上面相似的理由，我们可以证明 $\mathrm{Hom}_{kA_f^e}(\tau^{-1}\mathrm{ind}_b^a,\mathrm{ind}_d^c)=\mathrm{Hom}_{kA_f^e}(\mathrm{ind}_{b-1}^{a-1},\mathrm{ind}_d^c)=0$. 这样我们有 $Ext^1_{kA_f^e}(\mathrm{ind}_d^c,\mathrm{ind}_b^a)=0$.

所以根据定理 2.2, 有 $|E_{kA_\infty^\infty}(\mathrm{ind}_d^c,\mathrm{ind}_b^a)|=|Ext^1_{kA_f^e}(\mathrm{ind}_d^c,\mathrm{ind}_b^a)|=1$. ▌

设 E 是一个 kA_∞^∞ - 模， $r\in\mathbb{N}$, 记 $[E]^r$ 为 r 个 $[E]$ 在 $H(kA_\infty^\infty)$ 中的乘积. 应用上面定义的全序，我们可以得到 $H(kA_\infty^\infty)$ 的一个 PBW- 型基.

引理 3.5 设 $0\to M\to E\to N\to 0$ 是 kA_∞^∞ - 模的正和序列. 如果 $\mathrm{Hom}_{kA_\infty^\infty}(M,N)=0$, 那么 $g_{N,M}^E=1$.

证 设 $\pi:E\to N$ 是一个满同态，那么由于 $\mathrm{Hom}_{kA_\infty^\infty}(M,N)=0$, 有 $M\in\ker(\pi)$. 比较 M, E 和 N 的维数，可以得到 $M=\ker(\pi)$. 则根据定义引理可证. ▌

定理 3.2 集合

$$\Omega=\{[E_{i_1}]^{r_1}\cdots[E_{i_\alpha}]^{r_\alpha}|E_{i_j}\in\mathrm{ind}\text{-}kA_\infty^\infty,\alpha\in\mathbb{Z}_{\ge0},r_j\in\mathbb{N}\}$$

给出 $H(kA_\infty^\infty)$ 一个 PBW- 型基，其中 $E_{i_1}>E_{i_2}>\cdots>E_{i_\alpha}$ 为两两互不同构的不可分解 kA_∞^∞ - 模.

证 设 E 是一个有限维 kA_∞^∞ - 模，我们可以归纳证明存在 $t_j,m\in\mathbb{N}$,$j=1,2,\cdots,m$, 使得 E 可以分解为 $t_1E_{i_1}\oplus t_2E_{i_2}\cdots\oplus t_mE_{i_m}$, 其中 E_{i_j} 是两两互不同构的不可分解 kA_∞^∞ - 模，并且在上面定义的序下如果 $j>l$, $j,l=1,\cdots,m$, 有 $E_{i_j}<E_{i_l}$.

另外根据引理 3.5 进行简单的计算可以证明在 $H(kA_\infty^\infty)$ 中 $[E]=[t_1E_{i_1}]\diamond[t_2E_{i_2}]\diamond\cdots\diamond[t_mE_{i_m}]$. 也容易验证如果 F 是一个不可分解 kA_∞^∞ - 模，那么 $|E_{kA_\infty^\infty}(F,F)|=1$, 因此在 $H(kA_\infty^\infty)$ 中我们有 $[F]^r=h_r[rF]$, 其中 $h_r\in\mathbb{Q}$. 所以存在 $0\neq h\in\mathbb{Q}$, 使得 $[E]=[t_1E_{i_1}\oplus t_2E_{i_2}\cdots\oplus t_mE_{i_m}]=[t_1E_{i_1}]\diamond[t_2E_{i_2}]\diamond\cdots\diamond[t_mE_{i_m}]=h[E_{i_1}]^{t_1}\diamond\cdots\diamond[E_{i_m}]^{t_m}$. 由于 $[E_{i_1}]^{t_1}\diamond\cdots\diamond[E_{i_m}]^{t_m}=\frac{1}{h}[t_1E_{i_1}\oplus t_2E_{i_2}\cdots\oplus t_mE_{i_m}]$, 集合 Ω 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关. ▌

命题 3.3 $[\mathrm{ind}_b^a]$ 和 $[\mathrm{ind}_d^c]$ 在 $H(kA_\infty^\infty)$ 中的乘积可以如下给出， $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

$$[\mathrm{ind}_b^a]\diamond[\mathrm{ind}_d^c]=\begin{cases}(q+1)[\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_b^a], & a=c,b=d,\\ [\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_d^c], & a>c,b=d,\\ q[\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_d^c], & a<c,b=d,\\ [\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_d^c], & b>d,\\ q[\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_d^a], & c=a,b<d,\\ [\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_d^{b+1}]+[\mathrm{ind}_d^a], & c=b+1,b<d,\\ q[\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_d^c]+[\mathrm{ind}_d^a\oplus\mathrm{ind}_b^c], & c\in[a+1,b],b<d,\\ [\mathrm{ind}_b^a\oplus\mathrm{ind}_d^c], & c\notin[a,b+1],b<d.\end{cases}$$

证 直接根据 (3.2) 和第二部分给出的 kA_∞^∞ 的有限维表示的性质计算即可. ▌

设 R 是一个 finitary 环. $H(R)$ 是 R 的 Ringel-Hall 代数. 合成代数 $C(R)$ 是指由所有的有限单 R - 模 $[S]$ 的同构类生成的 $H(R)$ 的子代数. 关于 $C(R)$ 的更多信息，参见文献 [17].

命题 3.4 $H(kA_\infty^\infty)$ 和它的合成子代数重合.

证 根据推论 3.1 只需证明 $[E]$ 能够被 $\{[S_i]|i\in\mathbb{Z}\}$ 生成，其中 E 是一个不可分解 kA_∞^∞ - 模， S_i 是单 kA_∞^∞ - 模. 根据定理 2.1 $\{\mathrm{ind}_b^a|a\leq b,a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是所有的不可分解 kA_∞^∞ - 模，且 $\{\mathrm{ind}_a^a|a\in\mathbb{Z}\}$ 是所有的单 kA_∞^∞ - 模. 因此只需考虑 $a<b$ 时的情形. 根据命题 3.3 $[\mathrm{ind}_{b-1}^a]\diamond[\mathrm{ind}_b^b]=[\mathrm{ind}_b^a]+[\mathrm{ind}_{b-1}^a\oplus\mathrm{ind}_b^b]$ 并且 $[\mathrm{ind}_b^b]\diamond[\mathrm{ind}_{b-1}^a]=[\mathrm{ind}_{b-1}^a\oplus\mathrm{ind}_b^b]$. 故 $[\mathrm{ind}_b^a]=[\mathrm{ind}_{b-1}^a]\diamond[\mathrm{ind}_b^b]-[\mathrm{ind}_b^b]\diamond[\mathrm{ind}_{b-1}^a]$. 对模的长度进行数学归纳就可以完成证明. ▌

在下面我们刻画 $H(kA_\infty^\infty)$ 和 $H(kA_\infty^a)$ 之间的关系，其中 $a\in\mathbb{Z}$.

定理 3.3 设 $n,m\in\mathbb{Z}$, $m\leq n$, 那么

$$\lim_{n\to+\infty}H(kA_n^m)=H(\lim_{n\to+\infty}kA_n^m)=H(kA_\infty^m).$$

证 首先我们证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}kA_n^m=kA_\infty^m$.

如果 $n\leq u$, 显然 kA_n^m 是 kA_u^m 的一个子代数. 记嵌入映射 $kA_n^m\hookrightarrow kA_u^m$ 为 ϕ_u^n. 如果 $n\leq u\leq l, n,u,l\in\mathbb{Z}$, 显然有 $\phi_l^n=\phi_l^u\phi_u^n$. 如果 $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq m$, 我们也知道 kA_n^m 是 kA_∞^m 的子代数，记嵌入映射 $kA_n^m\hookrightarrow kA_\infty^m$ 为 f_n. 如果 $n\leq u,n,u\in\mathbb{Z}$, 易知 $f_n=f_u\phi_u^n$.

要证明 kA_∞^m 是正向极限，我们需要证明下面的范性：对任意 k- 代数 X 和一个满足条件 $g_n=g_u\phi_u^n$ 的代数同态的集合 $\{g_n:kA_n^m\to X|n\in\mathbb{Z}\}$, 其中 $n\leq u$, $n,u\in\mathbb{Z}$, 存在唯一的从 kA_∞^m 到 X 的代数同态 σ 使得对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq m$ 有 $g_n=\sigma f_n$.

由于 A_∞^m 的有限长度的路的集合构成 kA_∞^m 的一个基, 我们可以如此定义 σ, $\sigma(p)=g_n(p)$, 其中 p 是 A_∞^m 的任一路， $n=t(p)$. 设 α, β 是 A_∞^m 的两个路，令 $n=t(\alpha)$, $u=t(\beta)$, 那么

$$\sigma(\beta\alpha)=g_u(\beta\alpha)=g_u(\beta)g_u(\alpha)=g_u(\beta)g_u\phi_u^n(\alpha)=g_u(\beta)g_n(\alpha)=\sigma(\beta)\sigma(\alpha),$$

这就意味着 σ 是一个代数同态.

另外，设 p 是 A_n^m 的一个路，我们有 $t(p)\le n$, 因此 $\sigma f_n(p)=\sigma(p)=g_{t(p)}(p)=g_n(p)$. 而且如果这样的 σ 存在，我们一定有 $\sigma(p)=\sigma f_n(p)=g_n(p)$, 其中 p 是 A_∞^m 的任一满足 $t(p)=n$ 的有限长度路. 这样我们就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} kA_n^m=kA_\infty^m$.

下面我们要证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} H(kA_n^m)=H(kA_\infty^m)$.

我们知道如果 $n\le u$, $n,u\in\mathbb{Z}$, 可以把 $H(kA_n^m)$ 看作 $H(kA_u^m)$ 的一个子代数，如果 $n,m\in\mathbb{Z}$, $m\le n$, 可以把 $H(kA_n^m)$ 看作 $H(kA_\infty^m)$ 的一个子代数. 记 $\psi_u^n: H(kA_n^m)\hookrightarrow H(kA_u^m)$ 为嵌入映射，即如果 E 是有限维 kA_n^m - 模，有 $\psi_u^n([E])=[E]$. 如果 $n\le u\le l$, 显然有 $\psi_l^n=\psi_l^u\psi_u^n$. 定义 α_n 为嵌入映射 $H(kA_n^m)\hookrightarrow H(kA_\infty^m)$, 其中 $n,m\in\mathbb{Z}$, $m\le n$, 即如果 E 是有限维 kA_n^m - 模，有 $\alpha_n([E])=[E]$. 如果 $n\le u, n,u\in\mathbb{Z}$, 根据引理 2.2 引理 2.3 我们有 $\alpha_n=\alpha_u\psi_u^n$.

我们还需要证明下面的范性：对任意 $\mathbb{Q}$- 代数 X 和一个满足条件 $h_n=h_u\psi_u^n$ 的代数同态的集合 $\{h_n: H(kA_n^m)\to X|n\in\mathbb{Z},\ n\ge m\}$, 其中 $n\le u$, $n,u\in\mathbb{Z}$, 存在唯一的从 $H(kA_\infty^m)$ 到 X 的代数同态 θ 使得对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, $n\ge m$ 满足 $h_n=\theta\alpha_n$.

设 E 是一个 (r,n) - 型 kA_∞^m - 模， $r\ge m$, 定义 $\theta([E])=h_n([E])$, 其中把右式中的 E 看作一个 kA_n^m - 模. 由于所有有限维 kA_∞^m - 模同构类的集合构成 $H(kA_\infty^m)$ 的一个基，可以把 θ 唯一的线性扩张成一个从 $H(kA_\infty^m)$ 到 X 的线性映射.

设 E, F 分别是 (r_1,n) - 型和 (r_2,u) - 型有限维 kA_∞^m - 模，其中 $r_1,r_2\ge m$. 令 $v=\max\{n,u\}$, 那么根据引理 2.3 可以把 E 和 F 看作 kA_v^m - 模. 根据定理 3.1 我们有 $\theta([E]\diamond[F])=\theta(\sum_{[L]} g_{E,F}^L[L])=\sum_{[L]} g_{E,F}^L\theta([L])=\sum_{[L]} g_{E,F}^L h_v([L])=h_v(\sum_{[L]} g_{E,F}^L[L])=h_v([E]\diamond[F])=h_v([E])h_v([F])=h_v\psi_v^n([E])h_v\psi_v^u([F])=h_n([E])h_u([F])=\theta([E])\theta([F])$, 其中出现在和式中的任意 kA_∞^m - 模 L 是 (r,v) - 型 kA_∞^m - 模， $r=\min\{r_1,r_2\}$, 因此根据引理 2.3L 成为一个 kA_v^m - 模. 所以 θ 是一个代数同态.

给定任意有限维 kA_n^m - 模 E, 我们可以把 E 看作 kA_∞^m - 模，并且存在唯一的整数 u,r, $m\le r\le u\le n$ 使得 E 是一个 (r,u) - 型模，因此也可以把 E 看作 kA_u^m - 模. 由于 ψ_n^u 是嵌入映射，我们有

$$\theta\alpha_n([E])=\theta([E])=h_u([E])=h_n\psi_n^u([E])=h_n([E]),$$

因此 $\theta\alpha_n=h_n$.

而如果这样的映射 θ 存在，对任意的有限维 (r,n) - 型 kA_∞^m - 模 E, 其中 $r\ge m$, 我们一定有 $\theta([E])=\theta\alpha_n([E])=h_n([E])$. 这样我们就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} H(kA_n^m)=H(kA_\infty^m)$. ▎

相似地，我们可以证明

定理 3.4 设 $m\in\mathbb{Z}$, 那么

$$\lim_{m\to-\infty} H(kA_\infty^m)=H(\lim_{m\to-\infty} kA_\infty^m)=H(kA_\infty^\infty).$$

参 考 文 献

[1] Ringel C M. Hall algebras and quantum groups. Invent Math, 1990, **101**: 583–592

[2] Ringel C M. Hall algebras. In: Topics in Algebras. Banach Center Publ, PWN, Warsaw, 1990, **26**: 443–447

[3] Green J A. Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups. Invent Math, 1995, **120**: 361–377

[4] Lusztig G. Introduction to Quantum Groups. Prog Math 110. Basel: Birkhäuser Press, 1993

[5] Xiao J. Drinfeld double and Ringel-Green theory of Hall algebras. J Algebra, 1997, **190**: 100–144

[6] Deng B M, Xiao J. On double Ringel-Hall algebras. J Algebra, 2002, **251**: 110–149
[7] Kac V G. Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990
[8] Date E, Jimbo M, Kashiwara M, Miwa T. Transformation group for soliton equations. Publ RIMS, 1982, **18**: 1077–1110
[9] Goddard P, Olive D. Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics. Int J Mod Phys, 1986, **1**(2): 303–414
[10] Levendorskiĭ S, Soibelman Y. Quantum group A_∞. Comm Math Phys, 1991, **140**: 399–414
[11] Frenkel E, Mukhin E. The Hopf algebra Rep $U_q\widehat{gl}_\infty$. Selecta Math (N S), 2002, **8**(4): 537–635
[12] Palev T D, Stoilova N I. Highest weight representations of the quantum algebra $U_h(gl_\infty)$. J Phys, 1997, **30**(20): 699–705
[13] Auslander M, Reiten I, Smalϕ S. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge Studies in Advanced Math 36. Cambridge, UK: Cambridge Univ Press, 1994
[14] Ringel C M. Tame Algebras and Integral Quadratic. Lecture Notes in Math 1099. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1984
[15] Peng L G. Some Hall polynomials for representation-finite trivial extension algebras. J Algebra, 1997, **197**: 1–13
[16] Guo J Y, Peng L G. Hall algebras and Hall polynomials. J Algebra, 1997, **198**: 339–351
[17] Zhang P. Composition algebra of affine type. J Algebra, 1998, **206**: 505–540

Ringel-Hall Algebra of A_∞^∞-type

Hou Ruchen
(*School of Mathematics and Information Science, University of Yantai, Yantai 264005*)
Ye Yu
(*Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

Abstract: This is the first one of two papers studying the quantum group of sl_∞^∞ type via the Ringel-Hall algebra of A_∞^∞ type. For this we need to deal with finite-dimensional representations of the infinite-dimensional path algebra kA_∞^∞ over any field k. In the present paper, we first study the category of the finite-dimensional representations of kA_∞^∞ by determining all its indecomposable objects and their extensions explicitly ; then we investigate the Ringel-Hall algebra $H(kA_\infty^\infty)$ for a finite field k. The main viewpoint of this investigation is to regard $H(kA_\infty^\infty)$ as the direct limit of the Ringel-Hall algebra $H(kA_\infty)$ and $H(kA_\infty)$ as the direct limit of the Ringel-Hall algebra $H(kA_n)$. In particular, we get a PBW-basis of $H(kA_\infty^\infty)$ and show that $H(kA_\infty^\infty)$ coincides with its composition subalgebra.
Key words: Path algebra; Ringel-Hall algebra; Quantum group.
MR(2000) Subject Classification: 17B37; 16W35